TD 6 : Nombres complexes

Forme algébrique, conjugué, module

1 Mettre sous forme algébrique les complexes :

$$z = \frac{1}{i} \qquad u = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

2 On note $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \qquad \overline{f(z)} = \frac{1}{f(\bar{z})}$$

3 Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer de deux façons l'équivalence suivante :

$$|z-i| = |z+i| \iff z \in \mathbb{R}$$

1) Raisonner par double implication, en posant si nécessaire $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Raisonner par équivalences successives, en faisant apparaitre des conjugués au moyen de la formule $|u|^2 = u\bar{u}$.

4 Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\forall u, v \in \mathbb{C} \qquad |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

5 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que :

$$\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1$$

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad |z| = |1-z|$

7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les sommes (réelles) :

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^p(2p+1)$$
$$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + (-1)^{p+1}(2p)$$

8 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(x) = x \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 & \begin{cases} f(z+z') = & f(z) + f(z') \\ f(zz') = & f(z)f(z') \end{cases} \end{cases}$$

9 Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, on a :

$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité.

Forme trigonométrique et trigonométrie

10 Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants (avec $\theta \in \mathbb{R}$ fixé) :

1) $1 - \sqrt{2}$
2) $-5i$
3) $1 - i$
4) $\dfrac{3i}{1-i}$
5) $(1+i)^5$
6) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

11 Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

1) $(1+i)^n \in \mathbb{R}$
2) $\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in i\mathbb{R}$

12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^3 = \bar{z}^2$
2) $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$

13 On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\quad z + \bar{z} = z^3$. On raisonne par analyse-synthèse et on considère $z \in \mathbb{C}$ solution.

1) Trouver une solution z_0 évidente. Dans la suite, on suppose que $z \neq z_0$.
2) Justifier qu'il existe $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $r > 0$ tel que $z = re^{i\theta}$.
3) On suppose $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Aboutir à une contradiction.

4) On suppose $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Écrire $z+\bar{z}$ sous forme trigonométrique. En déduire que z ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs qu'on précisera.

5) On suppose $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Même question.

6) Conclure.

14 ★★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre sous forme trigonométrique les complexes :

1) $1+\cos\theta + i\sin\theta$

2) $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}$

15 ★★ Linéariser l'expression $\sin^5 x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \sin^5 x$.

16 ★★☆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$$

On pourra éventuellement écrire chaque sinus comme une parties imaginaire d'un complexe bien choisi.

17 ★★☆ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$C_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \qquad S_1 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

$$C_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

18 ★★★☆ (*Oral Centrale*) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|=1$. Montrer que

$$|1+z| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |1+z^2| \geq 1$$

Racines carrées, racines n-ièmes

19 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des **réels**. On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Démontrer $\quad P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow P(\overline{\alpha}) = 0$

20 ★☆ Déterminer les racines carrées des complexes suivants :

1) $z=-2$

2) $z=i$

3) $z=1+i$

4) $z=3+4i$

5) $z=8-6i$

6) $z=\dfrac{-3i}{1-i\sqrt{3}}$

21 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^3=8$

2) $z^5=32i$

3) $z^3=4\sqrt{2}(1+i)$

4) $z^8-1=0$

5) $(z+1)^n=2$

6) $z^n=(z-1)^n$

22 ★★ Soit $n \geq 3$, ω une racine n-ième de l'unité et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

23 ★★ On pose $\theta = 1$. Montrer que le complexe $e^{i\theta}$ est dans $\mathbb{U}$, mais qu'il n'est pas dans $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$.

Polynômes et résolutions d'équations

24 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2-(5+i)z+8+i=0$

2) $z^2-4(1-i)z+2(4-i)=0$

3) $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$
(on cherchera une solution réelle en premier lieu).

4) $z^4-z^2+1=0$

25 ★★

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5t)$ comme une fonction polynômiale de $\cos(t)$.

2) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation $16z^4-20z^2+5=0$.

3) Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

26 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} u+v &= 2 \\ uv &= -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u+v &= 3i \\ uv &= -1-3i \end{cases}$

c) $\begin{cases} u+v &= 4 \\ 1/u+1/v &= 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u+v &= 4 \\ u^2+v^2 &= 2 \end{cases}$

27 ★★☆ (*Exponentielle complexe*)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $e^z = 1 - i\sqrt{3}$
   (b) $e^z = 1 + i$
   (c) $e^z + e^{-z} = 1$
2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|e^z| \leq e^{|z|}$. Étudier le cas d'égalité.

28 ★☆ (*Le complexe* j) On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Mettre j sous forme trigonométrique. En déduire que $j^2 = \overline{j}$ et que $\overline{j}^2 = j$.
2) Montrer que j et $\overline{j}$ sont les racines du polynôme $1 + z + z^2$.
3) Factoriser le polynôme $z^3 - 1$.

29 ★★★ On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On définit :

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0\ [3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1\ [3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad C = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2\ [3]}}^{n} \binom{n}{k}$$

1) Calculer les complexes suivants :

$$u = A + B + C \quad v = A + jB + j^2C \quad w = A + j^2B + jC$$

2) En déduire la valeur de A.

Géométrie complexe

30 ★☆ Représenter graphiquement les ensembles suivants :

1) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| = 5\}$
2) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$
3) $\{z \in \mathbb{C}^* \mid 3\arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]\}$
4) $\left\{a + re^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in [0, \pi]\right\}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ sont fixés.

31 ★★ On considère les points A, B, C affixes respectives $a = 1, b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$. Déterminer la nature du triangle ABC.

32 ★★☆ Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1) Les points d'affixe 1, z et z^2 soient alignés.
2) Les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle dont M est l'angle droit.
3) Les vecteurs d'affixe z et $\overline{z}$ sont orthogonaux.
4) Les points z, $\dfrac{1}{z}$ et $z - 1$ sont situés sur un même cercle de centre l'origine.